

## MATRIZEN, EIGENWERTE UND DARSTELLUNGEN

Mit diesen Übungen machen Sie sich mit weiteren grundlegenden Eigenschaften von linearen Abbildungen vertraut.

**[H16]** Federkonstanten**[4 + 2 = 6 Punkte]**

Auf ein Teilchen wirken verschiedene Federkräfte, so dass die Gesamtkraft linear in der Auslenkung  $\vec{x}$  vom Ursprung ist,  $\vec{F} = -\kappa M \vec{x}$  mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die drei Richtungen  $\pm \vec{n}_1$ ,  $\pm \vec{n}_2$  und  $\pm \vec{n}_3$ , in denen die Kraft in Gegenrichtung zur Auslenkung wirkt, sowie die zu diesen Richtungen gehörenden Federkonstanten. Geben Sie die drei Vektoren auf Länge eins normiert an,  $(\vec{n}_i)^2 = 1$ . *Hinweis:* Es geht also darum, die normierten Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix  $M$  zu finden.
- (b) Was sind die Winkel zwischen diesen Richtungen?

**[H17]** Kontragrediente Transformation**[1 + 2 = 3 Punkte]**

Anlässlich eines Jubiläums legt ein Supermarkt beim Kauf pro Packung Zucker und pro Packung Mehl jedem Kunden noch jeweils eine Packung Zucker dazu.

- (a) Geben Sie die zu dieser linearen Abbildung gehörige Matrix  $L$  an.
- (b) In der folgenden Woche fallen die Zugaben weg. Die Preise werden jedoch so neu festgesetzt, dass man für die Warenmenge, die man in der Jubiläumswoche erhielt, dasselbe zahlen muss. Zeigen Sie, dass die neuen Preise  $z'$  pro Packung Zucker und  $m'$  pro Packung Mehl mit den alten Preisen  $z$  und  $m$  durch die Matrix  $(L^\top)^{-1}$  zusammenhängen.

**[H18]** Darstellungen**[3 Punkte]**

Eine Matrixgruppe  $G$  ist eine Menge von Matrizen, die mit jedem Element  $M$  auch  $M^{-1}$  enthält und mit jedem Paar  $M$  und  $N$  auch ihr Produkt  $MN$ . Zeigen Sie, dass die Menge  $G' = \{(M^\top)^{-1} : M \in G\}$  eine Matrixgruppe ist und dass die Abbildung  $D : M \mapsto D(M) = (M^\top)^{-1}$  eine Darstellung ist, das heißt, jedes Produkt von  $M$  und  $N$  auf das Produkt ihrer Bilder abbildet,  $D(M)D(N) = D(MN)$ .

**HINWEIS**

**Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**